Проблемы физики, математики и техники, № 1 (18), 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 517.2

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОРЕЖИМНОЙ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АБСТРАКТНЫМ ОПИСАНИЕМ СОСТОЯНИЙ

О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

RESEARCH OF THE MULTIREGIME QUEUEING NETWORK WITH ABSTRACT DESCRIPTION OF THE CONDITIONS

O.V. Yakubovich, Y.E. Dudovskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Исследуется модель открытой сети массового обслуживания с различными типами заявок и многорежимными стратегиями обслуживания. Каждый узел сети может работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени его работоспособности. Состояние узла описывается абстрактно и может не совпадать с числом заявок в нем. Устанавливаются условия мультипликативности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний исследуемой сети.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, различные типы заявок, многорежимное обслуживание, абстрактное описание, стационарное распределение.*

Open queueing network with different types of customers and multiregime service strategies is investigated. Every node can operate in several regimes answering different degrees of their working capacity. The condition of the node is described abstractly and can not coincide with number of the customers in it. The conditions of multiplicativity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

Keywords: *queueing network, different types of customers, multiregime service, abstract description, stationary distribution.*

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. Сложные реальные объекты стимулируют появление новых моделей сетей и их исследование. Нахождение стационарного распределения вероятностей состояний сетей массового обслуживания всегда является центральным в аналитических исследованиях и дает основу для дальнейшего изучения сетей.

В настоящей работе исследуется открытая сеть массового обслуживания с простейшим входящим потоком заявок, экспоненциальным обслуживанием и марковской маршрутизацией. Заявки, циркулирующие в сети, могут быть различных типов.

В сети допускается наличие внутренних переходов в узлах. Внутренние переходы обусловлены не поступлением или обслуживанием заявок в узлах, а внутренними изменениями в узлах и переходами из одного режима работы в другой с сохранением числа заявок каждого типа в узлах. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый режим отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером производительность узла уменьшается, ухудшается процесс обслуживания. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени их работоспособности.

Состояние узла описывается абстрактно, что позволяет не учитывать дисциплину обслуживания и обобщить модели сетей с многорежимными стратегиями обслуживания и различными типами заявок.

Сети с многорежимными стратегиями обслуживания и несколькими типами заявок исследованы в работах [1], [2].

1 Вспомогательная модель системы

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступают M независимых пуассоновских потоков с параметрами α_u, где α_u есть интенсивность поступления заявок типа u $\left(u=\overline{1,M}\right)$.

Система может находиться в одном из l режимов работы $\left(l=\overline{0,r}\right)$. Пусть $x(t)$ – состояние системы в момент времени t. Состояние системы описывается абстрактно и может не совпадать с числом заявок в ней. Процесс $x(t)$ имеет не более чем счётное пространство состояний X. Обозначим через 0 такое состояние системы, когда в ней отсутствуют заявки, и система работает в режиме 0; $|x|_u$ – число заявок типа u $\left(u=\overline{1,M}\right)$ в системе, которая находится в состоянии $x \in X$; $R(x)$ – режим функционирования системы, которая находится в состоянии $x \in X$. При описании системы введены обозначения, аналогичные обозначениям, введённым в работе [3].

Введём следующие обозначения для $x \in X$, $u=\overline{1,M}$:

$$\Omega^+\left(u,x,R(x)\right)=\left\{\tilde{x}\in X:|\tilde{x}|_u=|x|_u+1;|\tilde{x}|_m=|x|_m,\right.$$
$$\left. m\in\{1,2,...,M\}\setminus\{u\};R(\tilde{x})=R(x)\right\},$$
$$\Omega^-\left(u,x,R(x)\right)=\left\{\tilde{x}\in X:|\tilde{x}|_u=|x|_u-1,|x|_u\neq 0;\right.$$
$$\left.|\tilde{x}|_m=|x|_m,\ m\in\{1,2,...,M\}\setminus\{u\};R(\tilde{x})=R(x)\right\},$$
$$\Theta^+\left(x,R(x)\right)=\left\{\tilde{x}\in X:R(\tilde{x})=R(x)+1,\ R(x)\neq r;\right.$$
$$\left.|\tilde{x}|_m=|x|_m,\ m\in\{1,2,...,M\}\right\},$$
$$\Theta^-\left(x,R(x)\right)=\left\{\tilde{x}\in X:R(\tilde{x})=R(x)-1,\ R(x)\neq 0;\right.$$
$$\left.|\tilde{x}|_m=|x|_m,\ m\in\{1,2,...,M\}\right\}.$$

Пусть $\pi_u(x,\tilde{x})$ – условная вероятность того, что система перейдёт в состояние $\tilde{x}\in\Omega^+(u,x,R(x))$, если в неё поступит заявка типа u, заставшая её в состоянии $x\in X$.

Пусть $\mu_u(x,\tilde{x})$ – интенсивность перехода системы из состояния $x\in X$ в состояние $\tilde{x}\in\Omega^-(u,x,R(x))$ за счёт обслуживания заявки типа u.

В рассматриваемой системе предполагаются возможными внутренние переходы из состояния $x\in X$ в другое состояние $\tilde{x}\in X$ с тем же числом заявок. Это значит, что такие переходы обусловлены не поступлением или обслуживанием заявок, а внутренними изменениями в системе и переходами из одного режима работы в другой с сохранением числа заявок каждого типа.

Назовём режим 0 основным режимом работы. Время работы системы, находящейся в состоянии $x\in X$, в режиме $R(x)$ $\left(R(x)=\overline{0,r}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu(x,\tilde{x})$ система переходит в состояние $\tilde{x}\in\Theta^+(x,R(x))$, а с интенсивностью $\varphi(x,\tilde{x})$ – в состояние $\tilde{x}\in\Theta^-(x,R(x))$. Предполагается, что $\nu(x,\tilde{x})=0$, когда система находится в состоянии x с режимом r, и $\varphi(x,\tilde{x})=0$, когда система находится в состоянии x с режимом 0.

При сделанных предположениях $x(t)$ – однородный марковский процесс с не более чем счётным пространством состояний X.

Инфинитезимальные интенсивности переходов процесса $x(t)$ из состояния $x\in X$ в состояние $\tilde{x}\in X$ $\left(x\neq\tilde{x}\right)$ принимают следующий вид:

$$q(x,\tilde{x})=\alpha_u\pi_u(x,\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in\Omega^+(u,x,R(x)),$$
$$q(x,\tilde{x})=\mu_u(x,\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in\Omega^-(u,x,R(x)),$$
$$q(x,\tilde{x})=\nu(x,\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in\Theta^+(x,R(x)),$$
$$q(x,\tilde{x})=\varphi(x,\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in\Theta^-(x,R(x)).$$

Для всех остальных состояний $\tilde{x}$ интенсивность перехода $q(x,\tilde{x})=0$. Здесь

$$\pi_u(x,\tilde{x})\geq 0,\quad \sum_{\tilde{x}\in\Omega^+(u,x,R(x))}\pi_u(x,\tilde{x})=1;$$
$$\mu_u(x,\tilde{x})\geq 0,\ \ \mu_u(x)=\sum_{\tilde{x}\in\Omega^-(u,x,R(x))}\mu_u(x,\tilde{x})$$

– интенсивность обслуживания системой заявок типа u, когда она находится в состоянии x; $\nu(x,\tilde{x})\geq 0$, $\varphi(x,\tilde{x})\geq 0$, $\nu(x)=\sum_{\tilde{x}\in\Theta^+(x,R(x))}\nu(x,\tilde{x})$, $\varphi(x)=\sum_{\tilde{x}\in\Theta^-(x,R(x))}\varphi(x,\tilde{x})$ – интенсивности выхода из состояния x за счет внутренних переходов.

Пусть $\left\{p(x),x\in X\right\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний марковского процесса $x(t)$.

Уравнения обратимости для рассматриваемой системы имеют вид

$$\alpha_u\pi_u(x,\tilde{x})p(x)=\mu_u(\tilde{x},x)p(\tilde{x}),$$
$$\tilde{x}\in\Omega^+(u,x,R(x)),R(x)=\overline{0,r};$$
$$\nu(x,\tilde{x})p(x)=\varphi(\tilde{x},x)p(\tilde{x}),\quad \tilde{x}\in\Theta^+(x,R(x));$$
$$x\in X,u=\overline{1,M}.$$

Предположим, что для каждого $u=\overline{1,M}$,

$$x_1,x_2\in X,\ |x_1|_u=|x_2|_u,\ \tilde{x}_1\in\Omega^-(u,x_1,R(x_1)),$$
$$\tilde{x}_2\in\Omega^-(u,x_2,R(x_2)),\quad R(x_1)=R(x_2),$$
$$R(x_1),R(x_2)=\overline{0,r}$$

выполняется равенство

$$\frac{\pi_u(\tilde{x}_1,x_1)}{\mu_u(x_1,\tilde{x}_1)}=\frac{\pi_u(\tilde{x}_2,x_2)}{\mu_u(x_2,\tilde{x}_2)},$$

и для $x_1,x_2\in X$, $|x_1|_u=|x_2|_u$, $u=\overline{1,M}$,

$$\tilde{x}_1\in\Theta^-(x_1,R(x_1)),\ \tilde{x}_2\in\Theta^-(x_2,R(x_2))$$
$$\frac{\nu(\tilde{x}_1,x_1)}{\varphi(x_1,\tilde{x}_1)}=\frac{\nu(\tilde{x}_2,x_2)}{\varphi(x_2,\tilde{x}_2)}.$$

Введем следующие обозначения:

$$\frac{\pi_u(\tilde{x}_1,x_1)}{\mu_u(x_1,\tilde{x}_1)}=\frac{\pi_u(\tilde{x}_2,x_2)}{\mu_u(x_2,\tilde{x}_2)}=\rho_u\left(|x_1|_u,R(x_1)\right),$$
$$\frac{\nu(\tilde{x}_1,x_1)}{\varphi(x_1,\tilde{x}_1)}=\frac{\nu(\tilde{x}_2,x_2)}{\varphi(x_2,\tilde{x}_2)}=\tau\left(|x_1|_1,|x_1|_2,...,|x_1|_M,R(x_1)\right).$$

Лемма. Для обратимости системы необходимо и достаточно выполнения условий

$$\rho_u\left(|x|_u,R(x)-1\right)\tau\left(|x|_1,|x|_2,...,|x|_u,...,|x|_M,R(x)\right)=$$

$$= \rho_u \left(|x|_u, R(x) \right) \tau \left(|x|_1, |x|_2, ..., |x|_u - 1, ..., |x|_M, R(x) \right),$$

$$u = \overline{1, M}, |x|_u \neq 0, x \in X, R(x) = \overline{1, r}.$$

Доказательство леммы проводится с использованием циклического условия Колмогорова [4].

Из уравнений обратимости определяются стационарные вероятности состояний системы

$$p(x) = \prod_{u=1}^{M} \prod_{k_u=1}^{|x|_u} \alpha_u \rho_u (k_u, R(x)) \prod_{s=1}^{R(x)} \tau(0, ..., 0, s) p(0),$$

$$x \in X,$$

$$p(0) = \left(\sum_{x \in X} \prod_{u=1}^{M} \prod_{k_u=1}^{|x|_u} \alpha_u \rho_u (k_u, R(x)) \prod_{s=1}^{R(x)} \tau(0, ..., 0, s) \right)^{-1}.$$

Здесь произведение, в котором верхний индекс меньше нижнего, положим равным единице.

2 Склеивание узлов в открытую сеть

В сеть, состоящую из N узлов, поступает простейший поток заявок с параметром λ. Заявки могут быть M типов. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p_{0(i,u)}$ $\left(i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M} \right)$,

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{u=1}^{M} p_{0(i,u)} = 1.$$

Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы $\left(l_i = \overline{0, r_i}, \right.$ $\left. i = \overline{1, N} \right)$. Состояние сети в момент времени t описывается вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t))$, где $x_i(t)$ – состояние i-го узла в момент времени t. Состояние узла описывается абстрактно и может не совпадать с числом заявок в нём. Процесс $x(t)$ имеет не более чем счётное пространство состояний $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$.

Обозначим через 0 такое состояние i-го узла, когда в нём отсутствуют заявки, и узел находится в режиме работы 0; $|x_i|_u$ – число заявок типа u $\left(u = \overline{1, M} \right)$ в i-ом узле, который находится в состоянии $x_i \in X_i$; $R(x_i)$ – режим функционирования i-го узла, который находится в состоянии $x_i \in X_i$.

Множества

$$\Omega^+(i, u, x_i, R(x_i)), \ \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i)),$$

$$\Theta^+(i, x_i, R(x_i)), \ \Theta^+(i, x_i, R(x_i))$$

вводятся так же, как и в предыдущем разделе, но с указанием номера узла:

$$\Omega^+ \left(i, u, x_i, R(x_i) \right) = \left\{ \tilde{x}_i \in X_i : |\tilde{x}_i|_u = |x_i|_u + 1; \right.$$

$$\left. |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, m \in \{1, 2, ..., M\} \setminus \{u\}; R(\tilde{x}_i) = R(x_i) \right\},$$

$$\Omega^- \left(i, u, x_i, R(x_i) \right) =$$

$$= \left\{ \tilde{x}_i \in X_i : |\tilde{x}_i|_u = |x_i|_u - 1, |x_i|_u \neq 0; |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, \right.$$

$$\left. m \in \{1, 2, ..., M\} \setminus \{u\}; R(\tilde{x}_i) = R(x_i) \right\},$$

$$\Theta^+ \left(i, x_i, R(x_i) \right) = \left\{ \tilde{x}_i \in X_i : R(\tilde{x}_i) = R(x_i) + 1, \right.$$

$$\left. R(x_i) \neq r_i; |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, m \in \{1, 2, ..., M\} \right\},$$

$$\Theta^- \left(i, x_i, R(x_i) \right) = \left\{ \tilde{x}_i \in X_i : R(\tilde{x}_i) = R(x_i) - 1, \right.$$

$$\left. R(x_i) \neq 0; |\tilde{x}_i|_m = |x_i|_m, m \in \{1, 2, ..., M\} \right\}.$$

Пусть $\pi_{iu}(x_i, \tilde{x}_i)$ – условная вероятность того, что узел перейдёт в состояние $\tilde{x}_i \in \Omega^+(i, u, x_i, R(x_i))$, если в него поступит заявка типа u, заставшая его в состоянии $x_i \in X_i$.

Пусть $\mu_{iu}(x_i, \tilde{x}_i)$ – интенсивность перехода узла из состояния $x_i \in X_i$ в состояние $\tilde{x}_i \in \Omega^-(i, u, x_i, R(x_i))$ за счёт обслуживания заявки типа u.

В каждом узле предполагаются возможными внутренние переходы из состояния $x_i \in X_i$ в другое состояние $\tilde{x}_i \in X_i$ с тем же числом заявок каждого типа. Это значит, что такие переходы обусловлены не поступлением или обслуживанием заявок, а внутренними изменениями в узле и переходами с одного режима работы в другой с сохранением числа заявок каждого типа.

Назовём режим 0 основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i \in X_i$, в режиме $R(x_i)$ $\left(R(x_i) = \overline{0, r_i} \right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i)$ узел переходит в состояние $\tilde{x}_i \in \Theta^+(i, x_i, R(x_i))$, а с интенсивностью $\varphi_i(x_i, \tilde{x}_i)$ – в состояние $\tilde{x}_i \in \Theta^-(i, x_i, R(x_i))$. Предполагается, что $\nu_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$, когда узел находится в состоянии x_i с режимом r_i, и $\varphi_i(x_i, \tilde{x}_i) = 0$, когда узел находится в состоянии x_i с режимом 0.

Заявка типа u, обслуженная в i-ом узле, независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел и становится заявкой типа v с вероятностью $p_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть $\left(i, j = \overline{1, N}; u, v = \overline{1, M} \right)$,

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{v=1}^{M} p_{(i,u)(j,v)} + p_{(i,u)0} = 1.$$

Предполагается, что матрица вероятностей переходов $\left(p_{(i,u)(j,v)} : i, j = \overline{0, N}, u, v = \overline{1, M} \right)$, где $p_{(0,u)(0,v)} = 0$, неприводима. Система уравнений трафика принимает вид

$$\varepsilon_{iu} = p_{0(i,u)} + \sum_{j=1}^{N} \sum_{v=1}^{M} \varepsilon_{jv} p_{(j,v)(i,u)}, \qquad (2.1)$$

$$i = \overline{1, N}, u = \overline{1, M}.$$

Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $\left(\varepsilon_{iu}, i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}\right)$, что можно доказать, перенумеровав соответствующим образом элементы матрицы вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [5].

При сделанных предположениях $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счётным пространством состояний $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_N$.

Обозначим через $\alpha_{iu} = \lambda\varepsilon_{iu}$ интенсивность поступления заявок типа u в i-ый узел. Инфинитезимальные интенсивности переходов процесса $x_i(t)$ из состояния $x_i \in X_i$ в состояние $\tilde{x}_i \in X_i$ $\left(x_i \neq \tilde{x}_i\right)$ принимают следующий вид:

$$q_i(x_i,\tilde{x}_i) = \alpha_{iu}\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Omega^+(i,u,x_i,R(x_i)),$$
$$q_i(x_i,\tilde{x}_i) = \mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Omega^-(i,u,x_i,R(x_i)),$$
$$q_i(x_i,\tilde{x}_i) = \nu_i(x_i,\tilde{x}_i), \quad \tilde{x}_i \in \Theta^+(i,x_i,R(x_i)),$$
$$q_i(x_i,\tilde{x}_i) = \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i), \quad \tilde{x} \in \Theta^-(i,x_i,R(x_i)).$$

Для всех остальных состояний $\tilde{x}_i$ интенсивность перехода $q_i(x_i,\tilde{x}_i) = 0.$ Здесь

$$\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i) \geq 0, \quad \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega^+(i,u,x_i,R(x_i))} \pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i) = 1;$$
$$\mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i) \geq 0, \quad \mu_{iu}(x_i) = \sum_{\tilde{x}_i \in \Omega^-(i,u,x_i,R(x_i))} \mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)$$

– интенсивность обслуживания i-ым узлом заявок типа $u,$ когда он находится в состоянии $x_i;$

$$\nu_i(x_i,\tilde{x}_i) \geq 0, \quad \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i) \geq 0,$$
$$\nu_i(x_i) = \sum_{\tilde{x}_i \in \Theta^+(i,x_i,R(x_i))} \nu_i(x_i,\tilde{x}_i),$$
$$\varphi_i(x_i) = \sum_{\tilde{x}_i \in \Theta^-(i,x_i,R(x_i))} \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i)$$

– интенсивности выхода из состояния x_i за счет внутренних переходов $\left(i=\overline{1,N}\right).$

Рассмотрим изолированный i-ый узел в фиктивной окружающей среде (окружающая среда является фиктивной, т. к. в сети суммарные потоки заявок в узлы, вообще говоря, не являются простейшими), предполагая, что в него поступают M независимых простейших потоков заявок с интенсивностями $\lambda\varepsilon_{i1}$, $\lambda\varepsilon_{i2}$, …, $\lambda\varepsilon_{iM}$, где $\left(\varepsilon_{iu}, i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}\right)$ – решение системы уравнений трафика (2.1). Пусть $\left\{p_i(x_i), x_i \in X_i\right\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x_i(t).$ Предположим, что i-ый узел обратим. Уравнения обратимости для изолированного i-го узла сети принимают вид

$$\alpha_{iu}\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)p_i(x_i) = \mu_{iu}(\tilde{x}_i,x_i)p_i(\tilde{x}_i),$$
$$\tilde{x}_i \in \Omega^+(i,u,x_i,R(x_i)), \; R(x_i) = \overline{0,r_i};$$
$$\nu_i(x_i,\tilde{x}_i)p_i(x_i) = \varphi_i(\tilde{x}_i,x_i)p_i(\tilde{x}_i),$$
$$\tilde{x}_i \in \Theta^+(i,x_i,R(x_i));$$
$$x_i \in X_i, u=\overline{1,M}, i=\overline{1,N}.$$

Предположим, что для всех $i=\overline{1,N}, \; u=\overline{1,M}, \; x_{i1},x_{i2} \in X_i, \; \left|x_{i1}\right|_u = \left|x_{i2}\right|_u,$ $\tilde{x}_{i1} \in \Omega^-(i,u,x_{i1},R(x_{i1})), \tilde{x}_{i2} \in \Omega^-(i,u,x_{i2},R(x_{i2})),$ $R(x_{i1}) = R(x_{i2}), \; R(x_{i1}),R(x_{i2}) = \overline{0,r_i}$ выполняется следующее равенство

$$\frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i1},x_{i1})}{\mu_{iu}(x_{i1},\tilde{x}_{i1})} = \frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i2},x_{i2})}{\mu_{iu}(x_{i2},\tilde{x}_{i2})}$$

и для $x_{i1},x_{i2} \in X_i, \left|x_{i1}\right|_u = \left|x_{i2}\right|_u, u=\overline{1,M},$

$$\tilde{x}_{i1} \in \Theta^-(i,x_{i1},R(x_{i1})), \; \tilde{x}_{i2} \in \Theta^-(i,x_{i2},R(x_{i2}))$$
$$\frac{\nu_i(\tilde{x}_{i1},x_{i1})}{\varphi_i(x_{i1},\tilde{x}_{i1})} = \frac{\nu_i(\tilde{x}_{i2},x_{i2})}{\varphi_i(x_{i2},\tilde{x}_{i2})}.$$

Введем обозначения, аналогичные обозначениям, введенным в предыдущем разделе

$$\frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i1},x_{i1})}{\mu_{iu}(x_{i1},\tilde{x}_{i1})} = \frac{\pi_{iu}(\tilde{x}_{i2},x_{i2})}{\mu_{iu}(x_{i2},\tilde{x}_{i2})} = \rho_{iu}\left(\left|x_{i1}\right|_u, R(x_{i1})\right),$$
$$\frac{\nu_i(\tilde{x}_{i1},x_{i1})}{\varphi_i(x_{i1},\tilde{x}_{i1})} = \frac{\nu_i(\tilde{x}_{i2},x_{i2})}{\varphi_i(x_{i2},\tilde{x}_{i2})} =$$
$$= \tau_i\left(\left|x_{i1}\right|_1, \left|x_{i1}\right|_2, ..., \left|x_{i1}\right|_M, R(x_{i1})\right).$$

Стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла сети имеет вид

$$p_i(x_i) =$$
$$= \prod_{u=1}^{M}\prod_{k_{iu}=1}^{\left|x_i\right|_u} \alpha_{iu}\rho_{iu}(k_{iu},R(x_i)) \prod_{s=1}^{R(x_i)} \tau_i(0,...,0,s)p_i(0),$$
$$x_i \in X_i, i=\overline{1,N}, \tag{2.2}$$
$$p_i(0) =$$
$$= \left(\sum_{x_i \in X_i}\prod_{u=1}^{M}\prod_{k_{iu}=1}^{\left|x_i\right|_u} \alpha_{iu}\rho_{iu}(k_{iu},R(x_i)) \prod_{s=1}^{R(x_i)} \tau_i(0,...,0,s)\right)^{-1}.$$

3 Стационарное распределение сети

Обозначим через $[\tilde{x}_i]$ N-мерный вектор $\tilde{x} \in X,$ у которого все координаты, кроме i-ой, совпадают с координатами вектора $x \in X,$ а i-ая координата равна $\tilde{x}_i \in X_i.$ Через $[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j]$ обозначим N-мерный вектор $\tilde{x} \in X,$ у которого все координаты, кроме i-ой и j-ой, совпадают с координатами вектора $x \in X,$ а i-ая координата равна $\tilde{x}_i \in X_i,$ j-ая координата равна $\tilde{x}_j \in X_j.$ Если $q(x,y)$ – интенсивность перехода процесса $x(t)$ из состояния $x \in X$ в состояние $y \in X,$ $q(x) = \sum_{y \neq x} q(x,y)$ – интенсивность выхода из состояния x, то интенсивности переходов процесса $x(t)$ имеют вид

$$q(x,[\tilde{x}_i]) = \lambda p_{0(i,u)}\pi_{iu}(x_i,\tilde{x}_i),\ \tilde{x}_i \in \Omega^+(i,u,x_i,R(x_i)),$$

$$q(x,[\tilde{x}_i]) = \mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)p_{(i,u)0},\ \tilde{x}_i \in \Omega^-(i,u,x_i,R(x_i)),$$

$$q(x,[\tilde{x}_i]) = \nu_i(x_i,\tilde{x}_i),\quad \tilde{x}_i \in \Theta^+(i,x_i,R(x_i)),$$

$$q(x,[\tilde{x}_i]) = \varphi_i(x_i,\tilde{x}_i),\quad \tilde{x} \in \Theta^-(i,x_i,R(x_i)),$$

$$q(x,[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]) = \mu_{iu}(x_i,\tilde{x}_i)p_{(i,u)(j,v)}\pi_{jv}(x_j,\tilde{x}_j),$$

$$\tilde{x}_i \in \Omega^-(i,u,x_i,R(x_i)),\ \tilde{x}_j \in \Omega^+(j,v,x_j,R(x_j)),$$

$$u,v=\overline{1,M};\ i,j=\overline{1,N},\ x\in X.$$

Для всех остальных состояний $y \in X$ $q(x,y)=0$. Интенсивность выхода получается сложением указанных интенсивностей:

$$q(x) = \lambda + \sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\mu_{iu}(x_i)I_{(|x_i|_u \neq 0)} + \\ +\sum_{i=1}^{N}\left[\nu_i(x_i)I_{(R(x_i)\neq r_i)} + \varphi_i(x_i)I_{(R(x_i)\neq 0)}\right],\quad x\in X. \tag{3.1}$$

Теорема. Если для всех $i=\overline{1,N}$ выполняются условия обратимости

$$\rho_{iu}\left(|x_i|_u, R(x_i)-1\right)\times$$
$$\times\tau_i\left(|x_i|_1,|x_i|_2,\dots,|x_i|_u,\dots,|x_i|_M,R(x_i)\right) =$$
$$=\rho_{iu}\left(|x_i|_u,R(x_i)\right)\times$$
$$\times\tau_i\left(|x_i|_1,|x_i|_2,\dots,|x_i|_u-1,\dots,|x_i|_M,R(x_i)\right),$$
$$u=\overline{1,M},\ |x_i|_u\neq 0,\ x_i\in X_i,\ R(x_i)=\overline{1,r_i},$$

и сходится ряд

$$\sum_{x\in X} q(x)\prod_{i=1}^{N}\prod_{u=1}^{M}\prod_{k_{iu}=1}^{|x_i|_u}\alpha_{iu}\rho_{iu}(k_{iu},R(x_i))\prod_{s=1}^{R(x_i)}\tau_i(0,\dots,0,s),$$

где $q(x)$ – интенсивность выхода из состояния x, определяемая равенством (3.1), то марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет форму произведения

$$p(x) = p_1(x_1)p_2(x_2)\dots p_N(x_N),\quad x\in X,$$

где $p_i(x_i)$ определяется (2.2).

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ерёмина*, *А.Р.* Инвариантность стационарного распределения состояний сети с многорежимными стратегиями в случае зависимости параметров процессов обслуживания и переключения от состояния узла / А.Р. Ерёмина // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 2 (11). – С. 76–80.

2. *Якубович*, *О.В.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 74–77.

3. *Малинковский*, *Ю.В.* Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения / Ю.В. Малинковский // Автоматика и телемеханика. – 1991. – № 4. – С. 75–83.

4. *Колмогоров*, *А.Н.* К теории цепей Маркова / А.Н. Колмогоров // Теория вероятностей и математическая статистика: сб. статей. – М. : Наука, 1986. – С.173–178.

5. *Jackson*, *J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

6. *Бочаров*, *П.П.* Теория массового обслуживания: учебник / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М. : РУДН, 1995. – 529 с.

Поступила в редакцию 02.10.13.